Connesの特異空間上の調和解析 : 擬群力学系と接合積(C*環とK理論)

増田, 哲也

数理解析研究所講究録
488巻 1983年 66-82

Connesの特異空間上の調和解析
～擬群力学系と接合積～

京大数理研　増田哲也
(Tetsuya Masuda)

§0. 動機と事実

A. Connesによって創始された非可換積分論は、幾何学と作用素環の間に非常に興味深い関係をつけたばかりではなく、いわゆる葉層の軌道空間のような特異な商空間上で解析学を展開するひとつの道具を与えました。このことについて、次のようなことを考えてみます。

1. Random operator field $End_\Lambda(\Gamma)$ (A. Connes [4], [5], [6])
今, Γを ハール系 (ν, Λ, δ) を持つ測度擬群とします。(Connes [5], あるいは Kastler [13]を参照のこと。) このとき, $End_\Lambda(\Gamma)$ は $T=(T_x)_{x\in\Gamma^{(0)}}$ なる有界可測な作用素の族であって, $T_x \in B(L^2(\Gamma^x, \nu^x))$, $U(\gamma)T_x = T_y U(\gamma)$, $\gamma: x \to y$ なるもの全体です。但し, $U(\gamma): L^2(\Gamma^x, \nu^x) \to L^2(\Gamma^y, \nu^y)$ は, $[U(\gamma)\xi](\tilde{\gamma}) = \xi(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})$, $\xi \in L^2(\Gamma^x, \nu^x)$ によって定義されるユニタリー作用素(実はΓの二乗可積分表現)です。このとき, $T_x \in B(L^2(\Gamma^x, \nu^x))$ なる条件を出来る限り一般化しようということを考えてみます。

2. Poincaré Suspension (C. Series [19], J. Renault [18] et. al.)
今, Γを上記と同様とし, 特に non-unimodular (i.e. $\delta \neq 1$) とします。このとき, $\tilde{\Gamma} = \mathbb{R} \times_{\log\delta} \Gamma$ なる測度擬群が構成されて, しかもそのルール系が $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}, 1)$, つまり$\tilde{\Gamma}$は unimodular な測度擬群になります。実際、$End_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})$ は $End_{\Lambda}(\Gamma)$ のモジュラー接合積 (Takesaki dual, see [20]) になっていることが知られています。全く同様の現象がリー群, あるいはリー変換群についても起こります。このようなことをもっと一般的な見方でとらえることを考えます。

3. 葉層化束 (Kamber-Tordeur [12] et. al.)
$(M, \mathcal{F})$を葉層多様体, $P \xrightarrow{G} M$を主束とします。今, ∇をこの主束の平坦接続 (あるいは $\tau(\mathcal{F})$についての部分平坦接続) とすると葉層多様体 $(P, \tilde{\mathcal{F}})$ を得ることができます。ふつうの葉層化束 (i.e. $\tau(\mathcal{F}) = T(M)$) は、たとえば Gをコンパクトとすると $\pi_1(M) \longrightarrow G$ なる準同型によって特徴づけられるときがあります。このような状況の下で、$(M, \mathcal{F})$ から $(P, \tilde{\mathcal{F}})$ への対応は, 適当な条件の下において, それぞれに対応するホロノミー擬群における ある操作で記述することができます。この事実は上記2の Poincaré Suspension や, 次の歪積と深く関係しています。

4. 歪積 (Anzai [1], Zimmer [21] et. al.)
(X, G, α)を適当な意味で変換群とし、Yを適当な空間, またHをその構造群とします。今, $\Psi : X \times G \longrightarrow H$ なる関数が適当なコサイクル

条件を満たしたとすると，$\tilde{\alpha}_g(x, y) \equiv (\alpha_g(x), \Psi(x,g)y)$ によって $X \times Y$ は G-空間となり，$(X \times Y, G, \tilde{\alpha})$ なる変換群を得ることができます。このとき $\rho(x, g) \equiv \Psi(x, g^{-1})^{-1}$ とおくと Ψ がコサイクル条件を満たすことと $\rho : \mathrm{graph}(X, G, \alpha) \longrightarrow H$ が擬群準同型となることとは必要十分となります。つまり歪積のコサイクルは擬群準同型によって特徴づけることができます。我々は $\mathrm{graph}(X, G, \alpha)$ 及び $\mathrm{graph}(X \times Y, G, \tilde{\alpha})$ なる2つの擬群，及びそれらに対応する作用素環を問題にしたいと思います。これは上記3ではちょうど $\mathrm{graph}(M, \sigma)$ と $\mathrm{graph}(P, \tilde{\sigma})$ の関係と対応しています。

5. 余作用，及び余作用による接合積（Nakagami-Takesaki [17]）

今まで上記に掲げてきたことの中で特に2と3に注意します。特に2において flow of weight，あるいは modular action の dual action を考えると $\mathrm{End}_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{End}_{\lambda}(\Gamma) \times_a \hat{\mathbb{R}}$ となっていることがわかります。従って特に上記3で非可換な G を考えると，余作用が現われてくることになります。

6. 誘導表現，あるいは群作用の誘導（Takesaki [20], Zimmer [21] et al）

(X, H, α) を変換群，$H \subset G$ を閉部分群とします。このとき，$\mathrm{ind}_{H \uparrow G}(X, H, \alpha)$ は $((G/H) \times X, G, \tilde{\alpha})$ なる変換群であり，G の $(G/H) \times X$ への作用 $\tilde{\alpha}$ は $H \subset G$ なる関係によって決まる商コサイクルによって記述することができます。これもある意味で擬群準同型によりとらえうるものです。

以上のようなことを出来る限り一つの枠組の中で、特に擬群準同型というものを中心としてとらえようとした試みがこの小文の内容です。(see, T. Masuda [15], [16]) 以下、技術的な理由のため擬群Γはすべて局所コンパクト、また擬群準同型はすべて連続とします。また常にΓは忠実かつ properな横断関数νを持つこととし、W*-環の議論をするときは ハール系 (ν, Λ, δ) を考えることとします。(例えば Kastler [13] を参照のこと。)

§1. 特異直積分と擬群力学系

ここでは principalな 測度擬群Γを fix しておきます。(ν, Λ, δ)をそのハール系とします。次は Bellisard-Testard [2] のアイデアを基にしたものです。

<u>定義1.1</u> $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\Gamma^{(0)}}$: Hilbert Γ-bundle

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ ヒルベルト空間の可測な族であって、また共変函手 $U:\Gamma \to \mathcal{H}ilb$ であって $U(x)=\mathcal{H}_x$ なるものが存在する i.e. $\gamma: x\to y$ のとき $U(\gamma): \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_y$ があって chain rule をみたす。 ▨

<u>例1.2</u>

① $\mathcal{H}_x=L^2(\Gamma^x, \nu^x)$ は §0, 1 のユニタリー表現 U によって Hilbert Γ-bundle になります。この U 及び $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\Gamma^{(0)}}$ をそれぞれ U^c, 及び $\mathcal{H}^c$ と書き、canonical bundle と呼びます。

② $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_x^c\otimes\mathcal{H}_x^c$, $U(\gamma)=U^c(\gamma)\otimes U^c(\gamma)$ は Hilbert Γ-bundle を与えます。これを $\mathcal{H}^s$, U^s とかき, standard bundle と呼びます。

③ $\mathcal{H}_x=H$ なる constant field であって U が non-trivial のとき, やはり Hilbert Γ-bundle を得ることができます。これはすぐ後に出てきます。

④ 2つの Hilbert Γ-bundle のテンソル積も自然に Hilbert Γ-bundle になります。(例えば上記②, $\mathcal{H}^s=\mathcal{H}^c\otimes\mathcal{H}^c$。)

さて, 以下 $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_x\}_{x\in\Gamma^{(0)}}$ を U による Hilbert Γ-bundle とし, $\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ を考えます。これは $\tilde{U}=U^c\otimes U$ による Hilbert Γ-bundle で, $\mathcal{H}$ の canonical lift と呼ぶことにします。

<u>定義1.3</u> $\tilde{\mathcal{H}}$ の可測断面 $\xi=\{\xi_x\}_{x\in\Gamma^{(0)}}$ が共変とは殆んどすべての $\gamma\in\Gamma$ (w.r.t. $\Lambda_{\nu}\circ\nu$) について $\tilde{U}(\gamma)\xi_{s(\gamma)}=\sqrt{\delta(\gamma)}\,\xi_{r(\gamma)}$ が成立するときをいう。

このとき,

$$\int_{\Gamma^{(0)}/\sim}^{\oplus}\tilde{\mathcal{H}}_*\,d\Lambda \equiv \left\{\begin{array}{l}\tilde{\mathcal{H}}\text{ の共変可測断面全体であって}\\ \displaystyle\int_{\Gamma^{(0)}}\left\{\int_{\Gamma^x}\|\xi(\gamma)\|^2 f(\gamma)\,d\nu^x(\gamma)\right\}d\Lambda_\nu(x)<\infty\end{array}\right\}$$

と定義します。但し右辺のカッコの中の式の中にある f は1の分解, つまり $\int_{\Gamma^x}f(\tilde{\gamma}^{-1}\gamma)\,d\nu^{r(\gamma)}(\tilde{\gamma})=1$, $\forall\gamma\in\Gamma$ (a.e. w.r.t. $\Lambda_\nu\circ\nu$) なる非負値関数です。このとき, カッコの中の, 问題の式は1の分解 f のとり方によらないことが示されます。この値の平方根を, 共変可測断面 ξ のノルム $\|\xi\|_\Lambda$ と定義します。このとき, これはヒルベルト空間であることが示されて, しかも次が成立します。

<u>定理1.4</u> $\int^{\oplus}_{\Gamma^{(0)}/\sim} \widetilde{\mathcal{H}}_* \, d\Lambda \cong \int^{\oplus}_{\Gamma^{(0)}} \mathcal{H}_x \, d\Lambda_\nu(x)$

但し右辺は普通の意味の直積分です。特に例をあげると，$\mathcal{H}$としてconstant field Hをとると右辺は$L^2(\Gamma^{(0)}, \Lambda_\nu)\otimes H$，また$\mathcal{H}$としてcanonical bundleをとると$\widetilde{\mathcal{H}}$はstandard bundleとなり，右辺は$L^2(\Gamma, \Lambda_\nu\circ\nu)$となります。これは$\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)$のstandard representation spaceです。一つの重要な例（上記例1.2の③に当るもの）は次の状況から出てきます。

<u>定義1.5</u> W^*-環M，局所コンパクト測度擬群Γ，及び$\rho:\Gamma\to \mathrm{Aut}(M)$なる連続準同型の組$(M,\Gamma,\rho)$を$W^*$-擬群力学系と定義します。

今，Mのstandard representation spaceをHとすると，$\rho(\gamma)$のcanonical implementation $U(\gamma)$を考えることにより，constant field HはHilbert Γ-bundleとなります。我々は$\mathcal{H}^s\otimes H$なるHilbert Γ-bundleを考えます。このとき定理1.4により，この直積分は$L^2(\Gamma,\Lambda_\nu\circ\nu)\otimes H$となります。上で§0の1の問題と関係して次のようにおきます。

$$M\times_\rho\Gamma \equiv \left\{ \begin{array}{l} T=(T_x)_{x\in\Gamma^{(0)}} : \mathcal{H}^s\otimes H \text{上の有界可測な作用素の族であって} \\ \qquad T_x\in B(L^2(\Gamma^x,\nu^x))\otimes M \\ \qquad (U^s(\gamma)\otimes U(\gamma))T_x = T_y(U^s(\gamma)\otimes U(\gamma)),\ \gamma: x\to y \end{array} \right\}$$

また，$T=(T_x)_{x\in\Gamma^{(0)}}$のノルムを$\|T\| = \operatorname{ess.sup}_{x\in\Gamma^{(0)}}\|T_x\|$とおきます。このとき，$M\times_\rho\Gamma$は$W^*$-環となり，接合積と非常によく似た性質を持つことがわかります。まず，次のことを注意しておきます。

<u>注意1.6</u>

① $M=\mathbb{C}$, $H=\mathbb{C}$ なら．A. Connesの$\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)$そのものになります。

② ユニタリー対合，モジュラー自己同型などが Hilbert Γ-bundle の言葉で記述することができます。また $L^2(\Gamma, \Lambda_{\nu^{r(\gamma)}}) \otimes H$ は $M \times_\rho \Gamma$ の standard representation space になっています。

定理1.7 $M \times_\rho \Gamma$ は，ヒルベルト空間 $L^2(\Gamma, \Lambda_{\nu^{r(\gamma)}}) \otimes H$ 上の次の２種の作用素の族によって生成される。

$$\begin{cases} [\pi(a)\xi](\gamma) = \rho_{\gamma^{-1}}(a)\xi(\gamma), & a \in M,\ \xi \in L^2(\Gamma, \Lambda_{\nu^{r(\gamma)}}) \otimes H \\ [\lambda(f)\xi](\gamma) = \int_{\Gamma^{r(\gamma)}} f(\tilde{\gamma})\xi(\tilde{\gamma}^{-1}\gamma)\, d\nu^{r(\gamma)}(\tilde{\gamma}), & f \in \mathfrak{Ol}(\Gamma). \end{cases}$$

但し $\mathfrak{Ol}(\Gamma)$ は $\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)$ の左ヒルベルト環です。(例えば Kastler [13] 参照)
この意味で $M \times_\rho \Gamma$ は群による接合積の類似になっています。今までの議論で Γ は principal としてきましたが，特に一般の principal でない Γ のとき，$M \times_\rho \Gamma$ の定義を上記の $\pi(a)$, $a \in M$, 及び $\lambda(f)$, $f \in \mathfrak{Ol}(\Gamma)$ によって生成された W^*-環とします。このとき，次が成立します。

定理1.8

(1) $\rho, \alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ がコホモロガス（つまり $\tau : \Gamma^{(0)} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ なる連続関数があって $\rho_\gamma = \tau_{r(\gamma)} \circ \alpha_\gamma \circ \tau_{s(\gamma)}^{-1}$ を満たす。）または 1-コサイクル同値（つまりユニタリーに値をとるような連続関数 $u : \Gamma \longrightarrow M$ があって $\rho_\gamma(a) = u_\gamma \alpha_\gamma(a) u_\gamma^*$, $a \in M$, 及び $u_{\gamma_1\gamma_2} = u_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_1}(u_{\gamma_2})$ をみたす。）とき，$M \times_\rho \Gamma \cong M \times_\alpha \Gamma$。

(2) 特に Γ が測度位相変換群のグラフ（i.e. $\Gamma = \mathrm{graph}(X, G, \alpha)$）とすると，$G$ の $L^\infty(X) \otimes M$ への作用 $\tilde{\alpha}$ があって $M \times_\rho \Gamma = (L^\infty(X) \otimes M) \times_{\tilde{\alpha}} G$ となります。特に $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ が G-分離的（つまり $\beta : G \rightarrow$

$\mathrm{Aut}(M)$ なる準同型があって図形 $\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathrm{Aut}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle proj} & \nearrow_{\beta} & \\ G & & \end{array}$ が可換。)

ならば 作用 $\tilde{\alpha}$ は product type $\alpha\otimes\beta$ となります。 ▨

注意1.9　上記定理の(2)は§0の4の状況を含んでいます。特に $M=L^\infty(Y)$ $H=\mathrm{Aut}(L^\infty(Y))$ としてみるとちょうどうまく対応しています。ここで再び§0の2及び3を思い出してみることにします。次のような設定を考えるのが自然です。つまり擬群 Γ が空間 Ω に ρ によって作用している、という状況を考えます。"作用している"とは $\rho:\Gamma\longrightarrow H$ なる準同型を考えることです。但し H は Ω の構造群です。このとき、$\tilde{\Gamma}=\Omega\times_\rho\Gamma$ なる新しい擬群を考えることができます。$\tilde{\gamma}=(\omega,\gamma)\in\tilde{\Gamma}$ に対して、$r(\tilde{\gamma})=(\omega, r(\gamma))$, $s(\tilde{\gamma})=(\rho(\gamma)^{-1}\omega, s(\gamma))$ とおくことによって $\tilde{\Gamma}$ は自然に擬群になります。特に $\tilde{\Gamma}$ のハール系 $(\tilde{\nu},\tilde{\Lambda},\tilde{\delta})$ は、

$$\begin{cases} \tilde{\delta}(\omega,\gamma) = \delta(\gamma)\dfrac{d\mu(\omega)}{d\mu\circ\rho_{\gamma^{-1}}(\omega)} \\ \tilde{\nu} : \nu \text{ の引きもどし} \quad \text{i.e. } d\tilde{\nu}^{(\omega,x)}(\omega,\gamma) = d\nu^{x}(\gamma). \\ \tilde{\Lambda} : \quad \tilde{\Lambda}_{\tilde{\nu}} = \mu\otimes\Lambda_\nu \end{cases}$$

なる関係によって決まるものです。但し μ は Ω 上の Γ-準不変測度です。このとき、対応する W^* 環は $\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})=L^\infty(\Omega)\times_\rho\Gamma$ なる関係になっています。

§2. 特殊な場合.

我々はここで、特に次のような状況を考えます。今、$\rho:\Gamma\longrightarrow G$ を局所コンパクト群 G への連続な擬群準同型とします。このとき自然に W^* 擬

群力学系 $(L^\infty(G), \Gamma, \rho)$ を得ることができます。

<u>定理2.1</u> このとき, G の $\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)$ への余作用 $\hat{\rho}$ があって

$$\left(\text{i.e.}\quad \begin{tikzcd} \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma) \arrow[r, hook, "\hat{\rho}"'] \arrow[d, hook, "\hat{\rho}"] & \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)\otimes\lambda(G)'' \arrow[d, "\hat{\rho}\otimes 1"] \\ \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)\otimes\lambda(G)'' \arrow[r, "1\otimes\delta_G"'] & \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)\otimes\lambda(G)''\otimes\lambda(G)'' \end{tikzcd} \text{ なる図形が可換。}\right)$$

$L^\infty(G)\times_\rho\Gamma \cong \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma) *_{\hat{\rho}} G$ が成立。但し $*_{\hat{\rho}}$ は余作用による余接合積 (Nakagami-Takesaki [17] を参照)。従って特に G が可換なら, $\hat{G}$ による接合積となる。またさらに G, H も可換群とし, $\Gamma \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{\varphi} H$ なる準同型があるとすると $\hat{\rho}\circ{}^t\varphi = \widehat{\varphi\circ\rho}$ が成立する。 ▨

<u>注意2.2</u> 特殊な場合として Γ, G を共に可換群とすると, 上記定理によって $L^\infty(G)\times_\rho\Gamma \cong W^*(\Gamma)\times_{\hat{\rho}}\hat{G} \cong L^\infty(\hat{\Gamma})\times_{\hat{\rho}}\hat{G}$ となります。これは, Bellisard-Testard [2] によって定義された可換擬群のフーリエ変換により与えられる同型と同じものです。

<u>補題2.3</u> Gを可換とし, $\rho, \sigma : \Gamma \to G$ をコホモロガスとするとき, $\hat{\rho}, \hat{\sigma}$ は 1-コサイクル同値。

§3. 例.

1. モジュラー準同型と Poincaré Suspension.

今, Γを測度擬群, (ν, Λ, δ)をそのハール系とします。特に擬群準同型 $\log\delta : \Gamma \to \mathbb{R}$ を連続と仮定します。(例えば $\Gamma = \mathrm{graph}(M, \mathcal{F})$, Λ_ν : リーマン体積要素) このとき, $\tilde{\Gamma} = \mathbb{R}\times_{\log\delta}\Gamma$ は Γ の Poincaré Suspension になっていて, $\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})$

$\cong L^\infty(\mathbb{R})\times_{\log\delta}\Gamma\cong \mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)\times_\alpha\hat{\mathbb{R}}$ が成立します。また $\Gamma^{(0)}$ 上の測度の同じ類の中でのとりかえは、$\log\delta$ のコバウンダリーによる変換に対応し、また補題2.3により、ちょうど 1-コサイクル微分 $(D\phi : D\phi_0)_t$ に対応します。

2. これは今までの連続準同型のカテゴリーには入りませんが、上記の Poincaré Suspension と似たことが起こります。今、適当にコバウンダリーによる変換をほどこして、$\log\delta : \Gamma \longrightarrow k\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$, $k>0$, とできたとします。このとき、上記の議論と全く同様にして $\tilde{\Gamma}=(k\mathbb{Z})\times_{\log\delta}\Gamma$ をつくると unimodular な擬群を得ることができます。このとき、$\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})$ は半有限型で、$\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})\cong\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)\times_\alpha S^1$ の関係になっています。これはちょうどコンパクトなモジュラー作用の場合で、たとえば Powers factor ならば、このようなことが起こります。

3. Flow of weight (Hamachi-Oka-Oshikawa [9],[10], Connes-Takesaki [8])
Γ を超有限型 III_1 因子を与える擬群とし、準同型 $(\log\delta)_L : \Gamma \xrightarrow{\log\delta}\mathbb{R}\xrightarrow{L}S^1$ を考えます。但し L は周期 L の商写像とします。このとき、$\tilde{\Gamma}=S^1\times_{(\log\delta)_L}\Gamma$ は Powers factor, $\lambda=e^{-\frac{2\pi}{L}}$ を与えます。この場合の S^1 による余作用は、III_1-factor $\mathrm{End}_\Lambda(\Gamma)$ 上の $\mathbb{Z}$-作用に対応し、しかもこの $\mathbb{Z}$-作用はモジュラー作用の $1\longrightarrow(\frac{2\pi}{L})$ による制限に対応していて、上記の事実は A. Connes による一般的な結果 [3] よりも従います。もっと一般的に、今 $(\Omega,\mathbb{R},\theta)$ を保測エルゴード流とすると $\theta\circ\log\delta$ によって Ω は Γ-space になります。このとき、$\tilde{\Gamma}=\Omega\times_{\theta\circ\log\delta}\Gamma$ を考えると $\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})$ は、flow of weight $(\Omega,\mathbb{R},\theta)$ をもつ Krieger factor になります。

4. A. Connesの例, Anosov流 (A. Connes [4], [6], [7])

Ωを genus $\geqq 2$ なるコンパクトリーマン面, $T_1(\Omega)$を単位球面束とすると、Anosov葉層多様体 ($T_1(\Omega)$, $\mathcal{F}_A$) を考えることができます。これは超有限型であり, しかもこの葉層は群軌道によって与えられることがわかります。実際、Ωの普遍被覆は上半平面 $H_+ \cong AN$ ($PSL(2, \mathbb{R}) \cong KAN$ 岩沢分解) であり, また $\pi_1(\Omega) = L \hookrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ であることが知られていて, $L \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \cong T_1(\Omega)$, 葉層は右からの $H_+ \cong AN$ の作用により与えられます。これは自由かつエルゴード的な作用であることが知られています。このとき, 次のことがわかります。

(1) $H_+ \cong AN$ は群としては $ax+b$ 群, 従って non-unimodular. また $T_1(\Omega)$ 上の自然な測度は $PSL(2, \mathbb{R})$ のハール測度から来るため H_+ の作用で不変。従って対応する module δ は分離的準同型。しかも. A, N はそれぞれ geodesic, 及び horocycle に対応していて, horocycle がエルゴード的であること, 及び H_+ が solvable であることより $\Gamma = \mathrm{graph}(T_1(\Omega), \mathcal{F}_A)$ は超有限型III_1因子であること, 及び δ が geodesic のみに依存することも結果としてわかります。

(2) 従って (K, $\mathbb{R}$, θ) をエルゴード的保測流としたとき, $\tilde{\Gamma} = K \times_{\theta \circ \log \delta} \Gamma$ は, flow of weight (K, $\mathbb{R}$, θ) をもつ Krieger factor ですが, $\mathrm{End}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Gamma})$ は, $(L^\infty(K) \otimes W^*(T_1(\Omega), \mathcal{F}_H)) \times_{\theta \otimes \hat{\alpha}} \mathbb{R}$ なる形で書けます。但し. $W^*(T_1(\Omega), \mathcal{F}_H)$ は horocycle 流に対応するW^*環 (超有限型II_∞因子) です。

5. 群作用の誘導（Takesaki [20]）

(M, K, α) を W^*-力学系とし，$H, K \subset G$ を2つの閉部分群とします。今，$\underset{K\uparrow G}{\mathrm{ind}}(M, K, \alpha) = (\tilde{M}, G, \tilde{\alpha})$ を考えます。このとき，$\tilde{M} \times_{\tilde{\alpha}} H$ は擬群接合積 $M \times_\rho \Gamma$ と同型になります。但し $\Gamma = (G/K) \times_{(\mathrm{left})} H$，$\rho : \Gamma \longrightarrow K$ は $K \subset G$ の関係によって定まる商コサイクルです。この場合，ρ の連続性を仮定しますが，適当な条件の下に落とすことができます。また，場合によっては Γ は principal にはなりません。（例えば $H = G$）連続な商コサイクルの例は岩沢分解を使って作ることができます。特に $SL(2, \mathbb{R})$（あるいは $PSL(2, \mathbb{R})$）を考えると，automorphic factor がコサイクルの例を与えます。

§4. C^*-環の場合

今までと同様に Γ は局所コンパクトとしておきます。以下ハール系は必要なく，$\nu = \{\nu^x\}_{x \in \Gamma^{(0)}}$ なる忠実な横断関数の存在を仮定します。このとき，局所コンパクト変換擬群，(Ω, Γ, ρ) 及び対応する擬群 $\tilde{\Gamma} = \Omega \times_\rho \Gamma$ は前と全く同様です。

<u>定義4.1</u> C^*-環 A，局所コンパクト擬群 Γ，及び $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ なる連続準同型の組 (A, Γ, ρ) を C^*-擬群力学系と定義します。

このとき，対応する接合積の定義は次のようにします。まず $C_c(\Gamma, A)$（Γ 上の A-値連続関数でコンパクト台を持つもの全体）は次の操作により $*$-環になります。

$$\begin{cases} (f_1 * f_2)(\gamma) = \int_{\Gamma^{r(\gamma)}} \rho_{\tilde{\gamma}}(f_1(\tilde{\gamma}^{-1}\gamma)) f_2(\tilde{\gamma}) \, d\nu^{r(\gamma)}(\tilde{\gamma}) \\ f^{\#}(\gamma) = \rho_\gamma(f(\gamma^{-1})^*). \end{cases}$$

今，HをAの適当な表現空間とし，$C_c(\Gamma, A)$上にC^*ノルムを次のように定義します：

$$\|f\| = \sup_{x \in \Gamma^{(0)}} \|\pi_x(f)\|$$

但し
$$[\pi_x(f)\xi](\gamma) = \int_{\Gamma^{r(\gamma)}} \rho_{\tilde{\gamma}}(f(\tilde{\gamma}^{-1}\gamma))\xi(\tilde{\gamma})\, d\nu^{r(\gamma)}(\tilde{\gamma}),$$
$$\xi \in L^2(\Gamma^x, \nu^x) \otimes H.$$

そこで$A \times_\rho \Gamma$を，$C_c(\Gamma, A)$の上記C^*ノルムによる完備化として定義します。このときW^*環の場合と同様のことが成立します。

<u>定理4.2</u>

(1) $\{\pi_x(f)\}_{x \in \Gamma^{(0)}}$は共変 i.e. $(\rho_\gamma \otimes Ad_{U(\gamma)})(\pi_x(f)) = \pi_y(f)$, $\gamma : x \to y$.

(2) ρ, αがコホモロガス，または1-コサイクル同値ならば$A \times_\rho \Gamma \cong A \times_\alpha \Gamma$. 但し1-コサイクル同値の定義はmultiplierのユニタリーに値をとるものとします。

(3) $\Gamma = \mathrm{graph}(X, G, \alpha)$ならば，作用$\tilde{\alpha}$が存在して$A \times_\rho \Gamma = (C_0(X) \otimes A) \times_{\tilde{\alpha}} G$.
またρがG-分離的ならば$\tilde{\alpha}$はproduct type.

(4) 変換擬群(Ω, Γ, ρ)に対して$\tilde{\Gamma} = \Omega \times_\rho \Gamma$とすると$C^*(\tilde{\Gamma}) \cong C_0(\Omega) \times_\rho \Gamma$.

<u>定理4.3</u> $\rho : \Gamma \to G$を連続準同型とするとき，$C^*(\Gamma)$上のGの連続な余作用$\hat{\rho}$があって$C^*(\Gamma) *_{\hat{\rho}} G \cong C_0(G) \times_\rho \Gamma$.

(C^*環の場合の，余作用による接合積についてはImai-Takai [11]を参照)

特にGを可換とすると$\hat{G}$の作用は$C_c(\Gamma)$上で書き下すことができます。

<u>補題4.4</u> Gを可換群，$\rho, \alpha : \Gamma \to G$をコホモロガスな準同型とするとき，2つの$\hat{G}$-作用$\hat{\rho}, \hat{\alpha}$はmultiplierの意味で1-コサイクル同値。

§5. 双対性, Connes スペクトラム.

今までの記号をそのまま使うことにします。$\rho:\Gamma\to G$ を連続準同型とします。このとき $\tilde{\Gamma}=G\times_\rho\Gamma$ を考えます。$\tilde{\Gamma}^{(0)}=G\times\Gamma^{(0)}$ ですが、Gの方の右移動は $\tilde{\Gamma}$ の同値関係と可換なので $\Gamma_G=(G\times_\rho\Gamma)\times_{(right)}G$ なる亜群を考えることができます。Γ_G の亜群の構造は $\tilde{\gamma}=(g,\gamma,h)\in\Gamma_G$ に対して $r(\tilde{\gamma})=(g,r(\gamma))$, $s(\tilde{\gamma})=(\rho(\gamma)^{-1}gh,\ s(\gamma))$ によって自然に決まるものです。今, $\Gamma_{G,p}=\Gamma\times(G\times_{(right)}G)$ とおくと, (i.e. 上記の Γ_G の構成で ρ を自明なものにとったもの.) このとき, $(g,\gamma,h)\longmapsto(g,\gamma,g^{-1}\rho(\gamma)gh)$ は $\Gamma_{G,p}\xrightarrow{\sim}\Gamma_G$ なる亜群同型を与えます。一方, 上記の作り方より $C^*(\tilde{\Gamma})\times_{(right)}G=C^*(\Gamma_G)$ となっていて, しかもこのG-作用は $C^*(\Gamma)$ 上の G による余作用 $\hat{\rho}$ の双対になっているので, $C^*(\Gamma_{G,p})=C^*(\Gamma)\otimes C^*(G\times_{(right)}G)=C^*(\Gamma)\otimes\mathcal{K}(L^2(G))$ と合わせると, これらのことは余作用から始まる接合積の双対性を示す例になっていることがわかります。従って特に §0, 3 の状況の下では, 適当な条件下に, $K_*(C^*(M,\mathcal{F}))=K_*(C^*(P,\tilde{\mathcal{F}})\times_\alpha G)$ から, もしGがコンパクトなら $K^*(M/\mathcal{F})=K^*_G(P/\tilde{\mathcal{F}})$, またGが単連結可解リー群なら, $K^*(M/\mathcal{F})$ と $K^*(P/\tilde{\mathcal{F}})$ の間にトム同型が存在することがわかります。さて, 始めの設定に戻って C^*-余力学系 $(C^*(\Gamma), G, \hat{\rho})$ の Connes spectrum $\Gamma(\hat{\rho})$ (see Katayama [14]) 及び normalized Connes spectrum $\Gamma_n(\hat{\rho})\equiv\bigcap_{g\in G}g\Gamma(\hat{\rho})g^{-1}$ を考えます。定義より $\Gamma(\hat{\rho}), \Gamma_n(\hat{\rho})$ は共にGの閉部分群で, 特に $\Gamma_n(\hat{\rho})$ は正規部分群となります。余作用 $\hat{\rho}$ がある作用の双対ならば, $\Gamma(\hat{\rho})$ は正規部分群になりますが, 一般に $\Gamma(\hat{\rho})$ は正規部分群にはなりません。

<u>補題5.1</u> $\rho, \alpha : \Gamma \to G$ がコホモロガスならば $\Gamma_n(\hat{\rho}) = \Gamma_n(\hat{\alpha})$.

<u>定理5.2</u>

(1) $C^*(\Gamma) *_{\hat{\rho}} G$: prime $\iff$ $C^*(\Gamma)$: $\hat{\rho}$-prime & $\Gamma_n(\hat{\rho}) = G$.

(2) Gをコンパクトとするとき、

$C^*(\Gamma) *_{\hat{\rho}} G$: simple $\iff$ $C^*(\Gamma)$: $\hat{\rho}$-simple & $\Gamma_n(\hat{\rho}) = G$.

<u>注意5.3</u>

(1) 上記の $\tilde{\Gamma}^{(0)}$ 上の G-作用は、葉層の葉を保つ群作用の例になっています。

(2) $\overline{\rho(\Gamma)} \supset \Gamma(\hat{\rho})$. また、$\Gamma(\hat{\rho}) = G \iff \Gamma_n(\hat{\rho}) = G$ より、$C^*(\Gamma) *_{\hat{\rho}} G$ が simple or prime ならば $\rho(\Gamma)$ は G で dense.

References

[1] Anzai, H., Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J. (1951), 83–99.

[2] Bellisard, J. - Testard, D., Almost periodic Hamiltonians: an algebraic approach, preprint 1981.

[3] Connes, A. Une classification des facteurs de type III, Ann. Ecole Norm. Sup. 6 (1973), 133–252.

[4] Connes, A. The von Neumann algebra of a foliation, Lecture Notes in Physics 80 (1978) Springer, 139–155.

[5] Connes, A. Sur la theorie non commutative de l'integration Lecture Notes in Math. 725 (1979) Springer 19–143.

[6] Connes, A. Feuilletages et algèbres d'operateurs, Lecture Notes in Math. 842 (1981), Springer 139-155.

[7] Connes, A. A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symposia in Pure Math 38 (1982) Part I 521-628.

[8] Connes, A.-Takesaki, M., The flow of weights on factors of type III, Tohoku Math. J. 29 (1977), 473-575.

[9] Hamachi, T.-Oka, Y.-Oshikawa, M., A classification of ergodic non-singular transformation groups, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ. 28 (1974), 113-133.

[10] Hamachi, T.-Oka, Y.-Oshikawa, M., Flows associated with ergodic non-singular transformation groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1975), 31-50.

[11] Imai, S.-Takai, H., On a duality for C^*-crossed products by a locally compact group, J. Math. Soc. Japan 30, (1978), 495-504.

[12] Kamber, F.W.-Tordeur, P., Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Math. 493 (1975), Springer.

[13] Kastler, D., On A. Connes' non commutative integration theory, Comm. Math. Phys. 85 (1982), 99-120.

[14] Katayama, Y., Remarks on a C^*-dynamical system, Math. Scand. 49 (1981), 250-258.

[15] Masuda, T., Groupoid dynamical systems and crossed product , In preparation.

[16] Masuda, T., On the primeness and the simplicity of co-crossed product C*-algebra constructed by groupoid homomorphism. (tentative title), in preparation.

[17] Nakagami, Y. - Takesaki, M., Duality for crossed products of von Neumann algebras, Lecture Notes in Math. 731 (1979), Springer.

[18] Renault, J., A groupoid approach to C*-algebras, Lecture Notes in Math. 793 (1980), Springer.

[19] Series, C., The Poincaré flow of a foliation, American J. Math. 102 (1980), 93-128.

[20] Takesaki, M., Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131 (1973), 249-310.

[21] Zimmer, R., Ergodic theory, group representations, and rigidity, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 383-416.